

Approximations rationnelles & Nombres algébriques

I) Développement décimal et nombres rationnels

Théorème Tout $x \in [0, 1[$ admet un unique développement décimal $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$, où $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ non stationnaire à 9.

Remarque Sans la condition de non stationnarité, on perd l'unicité, puisque $0,0999 \dots = \sum_{k=2}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Proposition $\alpha \in [0, 1[$ est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ est rationnel, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p < q$, alors le développement décimal de α s'obtient par l'algorithme qui consiste à multiplier $p_0 = p$ par 10, puis écrire la division euclidienne de $10p_0$ par q , qui s'écrit $10p_0 = x_1 q + p_1$, où x_1 est le premier chiffre décimal de $\frac{p}{q}$ puis à recommencer en remplaçant p_0 par $p_1 \in \llbracket 0, q \rrbracket$.

On définit ainsi une suite de restes, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\llbracket 0, q-1 \rrbracket$. Après au plus $q-1$ étapes, on aura trouvé deux restes p_k et p_ℓ qui sont égaux. La suite des décimales sera périodique à partir du rang k , de période $\ell - k$.

Réciproquement, si le développement décimal de α est périodique à partir du rang n_0 , de période $T \in \mathbb{N}^*$, alors $10^{n_0+T}\alpha - 10^{n_0}\alpha$ est un entier, noté p , et on a $\alpha = \frac{p}{10^{n_0+T} - 10^{n_0}} \in \mathbb{Q}$. $\square$

II) Approximations rationnelles

1) Théorème de Dirichlet

Le théorème de Dirichlet permet de mesurer à quel point il est toujours possible d'approcher un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ par des rationnels.

Théorème Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$ tels que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x .

On considère les parties fractionnaires des $Q+1$ premiers multiples de α : $\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{Q\alpha\}$.

Ces quantités appartiennent à $[0, 1[$, donc d'après le principe des tiroirs, on peut en trouver deux, disons $\{k\alpha\}$ et $\{\ell\alpha\}$ avec $k > \ell$, dont la distance est $\leq \frac{1}{Q}$.

La différence $k\alpha - \ell\alpha$ est alors proche d'un entier : il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|k\alpha - \ell\alpha - p| \leq \frac{1}{Q}$, ce qui donne $\left| \alpha - \frac{p}{k-\ell} \right| \leq \frac{1}{Q(k-\ell)}$. $\square$

Remarque Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appliquant ce qui précède à $Q = n$, on obtient l'existence de $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{nq_n}$.

La suite $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_{n \geq 1}$ converge alors vers α et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$.

Remarque En particulier, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Version en dimension supérieure : co-approximations rationnelles

Proposition Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |q\alpha_i - p_i| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$. On considère les n -uplets $u_k = (\{k\alpha_1\}, \dots, \{k\alpha_n\})$ dans $[0, 1]^n$, pour $k \in \mathbb{N}$. On découpe $[0, 1]^n$ en N^n cubes de côtés $\frac{1}{N}$. D'après le principe des tiroirs, deux des u_k , notés u_k et u_ℓ , tombent dans le même cube, et l'entier $q = k - \ell$ convient. $\square$

L'exemple suivant est une application de ce résultat.

Exemple Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{U}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, |\alpha_i^n - 1| \leq \varepsilon$.

Démonstration. On écrit $\alpha_i = e^{i2\pi\theta_i}$. Appliquer le résultat précédent aux θ_i : il existe un entier n tel que tous les $n\theta_i$ soient proches d'un entier. Alors tous les α_i^n sont proches de 1. $\square$

3) Bonnes et mauvaises approximations

Définition Pour $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on dit que α est β -approximable par des rationnels s'il existe une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ qui converge vers α et une constante C telle que $\forall n, \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{C}{q_n^\beta}$.

Remarque Si $\beta < \beta'$, si α est β' -approximable, alors α est β -approximable.

Remarque Si α est rationnel, il est β -approximable pour tout β .

En ces termes, le théorème de Dirichlet dit que tout réel est 2-approximable.

Proposition Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2}$.

Démonstration. Notons que pour p, q vérifiant $\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq 1$, la constante $C = 1$ convient.

Sous l'hypothèse $\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq 1$, on a $q \leq 10p$ et $p \leq 10q$. Alors

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{\left| 2 - \frac{p^2}{q^2} \right|}{\sqrt{2} + \frac{p}{q}} = \frac{|2q^2 - p^2|}{2q^2 + 2pq} \geq \frac{|2q^2 - p^2|}{2q^2 + 20q^2} \geq \frac{1}{30q^2},$$

puisque $|2q^2 - p^2| \geq 1$, étant un entier non nul (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

□

Corollaire Pour $\beta > 2$, $\sqrt{2}$ n'est pas β -approximable.

Remarque Autrement dit, $\sqrt{2}$ est mal approché par des rationnels.

4) Extension aux nombres algébriques

Ce phénomène peut se généraliser aux nombres algébriques.

Définition Un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple $\sqrt{2}$ est algébrique, comme racine de $X^2 - 2$.

Proposition Soit α un nombre algébrique irrationnel. Il existe $n \geq 2$ et une constante $C > 0$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

Démonstration. Soit P un polynôme rationnel qui s'annule en α . Quitte à multiplier P par un entier, on peut supposer que ses coefficients sont entiers. On note n le degré de P . Comme α est irrationnel, on a $\deg P \geq 2$.

Le polynôme P n'a qu'un nombre fini de racines. On choisit $\delta > 0$ tel que P n'ait aucune racine rationnelle sur le segment $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Pour $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$ on distingue deux cas : Si $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \delta$, alors $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\delta}{q^n}$.

Sinon, la fonction P' est continue sur le segment $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. On admet (c'est un théorème sur la continuité) que cela implique l'existence de $M > 0$ tel que $\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |P'(t)| \leq M$.

On écrit alors $\left| P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \int_{p/q}^{\alpha} P'(t) dt \right| \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| M$, c'est-à-dire $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|P(\frac{p}{q})|}{M}$.

Pour finir on peut écrire $P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^n a_k p^k q^{n-k}$. Comme $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, la somme précédente est un entier non nul, donc $|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^n}$. On a obtenu $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}$, d'où le résultat. □

5) Conséquence : existence de nombres transcendants

Définition Un nombre transcendant est un nombre non algébrique.

Proposition Il existe des nombres transcendants.

Démonstration. On considère le nombre de Liouville

$$\lambda = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,1100010000\dots,$$

défini par son développement décimal qui comporte un 1 aux indices $k!$.

Le développement décimal de λ n'est clairement pas périodique, donc λ est irrationnel.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}$. C'est un nombre rationnel qui s'écrit $\lambda_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n = 10^{n!}$.

On a $|\lambda - \lambda_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} \simeq \frac{1}{10^{(n+1)!}} = \frac{1}{q_n^{n+1}}$.

Si λ était un nombre algébrique, d'après le paragraphe précédent il existerait $d \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tel que $\forall n, |\lambda - \lambda_n| \geq \frac{C}{q_n^d}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{q_n^{n+1}} \geq \frac{C}{q_n^d}$, ce qui n'est pas possible. □

Remarque On sait montrer que les nombres π et e sont transcendants.

Remarque La transcendance, et même l'irrationalité, de constantes mathématiques est souvent une question difficile. L'irrationalité de $\pi + e$ par exemple est un problème ouvert.

Remarque Il en va de même de l'irrationalité de la constante γ d'Euler définie comme la limite de $H_n - \ln n$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

III) Un système dynamique

1) Densité de $\{n\alpha\}$

L'idée de la démonstration du théorème de Dirichlet permet d'obtenir le résultat suivant.

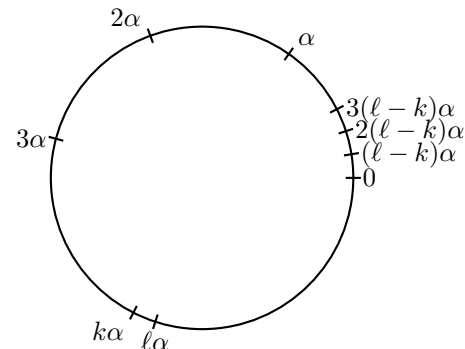
Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ irrationnel. L'ensemble $\{\{n\alpha\}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le principe des tiroirs, on peut trouver k, ℓ distincts tels que $|\{k\alpha\} - \{\ell\alpha\}| \leq \varepsilon$. Alors $(k - \ell)\alpha$ est proche d'un entier, ce qui signifie qu'on a bien $\{(k - \ell)\alpha\} \leq \varepsilon$, ou bien $1 - \{(k - \ell)\alpha\} \leq \varepsilon$.

Dans le premier cas, comme α est irrationnel, $\{(k - \ell)\alpha\} \neq 0$, et pour tout $x \in [0, 1]$, il existe un multiple de $\{(k - \ell)\alpha\}$ proche de x à ε près, ce qui donne $|\{m(k - \ell)\alpha\} - x| \leq \varepsilon$, comme voulu.

Le second cas est similaire. $\square$

On peut identifier l'ensemble des parties fractionnaires possibles (l'intervalle $[0, 1]$) à un cercle de périmètre 1. On peut alors représenter graphiquement la situation précédente comme ci-contre : sur le cercle, on projette les multiples $n\alpha$.



Notion d'équidistribution

Le résultat de densité précédent peut s'interpréter en termes d'un système dynamique : étant donné un nombre α , on se place sur un cercle de périmètre 1 et à chaque étape on «avance» d'une distance α . Que dire de la trajectoire, c'est-à-dire de l'ensemble des points atteints au fil du temps.

Si α est rationnel, la trajectoire sera périodique. Si α est irrationnel, on a vu que la trajectoire sera dense. Si on choisit un petit arc de cercle $\mathcal{A}$ sur le cercle la trajectoire visitera cet arc une infinité de fois (par densité), mais mieux que ça, on peut montrer que sur un temps long, le nombre de points qui tombent dans cet arc sera proportionnel à la longueur de l'arc.

Définition On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1 si pour tous $a < b \in [0, 1]$, on a

$$\frac{|\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_k \in [a, b]\}|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a.$$

Théorème Si α est irrationnel, $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1.

Démonstration. Cf feuille culturelle sur l'intégration. $\square$

2) Version non homogène du théorème de Dirichlet

Soit α irrationnel et $\beta \in [0, 1]$. D'après la densité de $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $|\alpha q - p - \beta| \leq \varepsilon$.

On peut préciser cette approximation au sens suivant :

Théorème Si α est irrationnel et $\beta \in [0, 1]$, on peut trouver des suites $(p_n), (q_n)$ qui tendent vers l'infini telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha q_n - p_n - \beta| \leq \frac{3}{q_n}$$

Remarque L'ordre d'approximation est le même que dans le théorème de Dirichlet, mais cette formulation est plus faible : pour $n \in \mathbb{N}^*$ il n'est pas toujours possible de trouver p_n, q_n de valeurs absolues majorées par Cn tels que $|\alpha q_n - p_n - \beta| \leq \frac{1}{n}$.